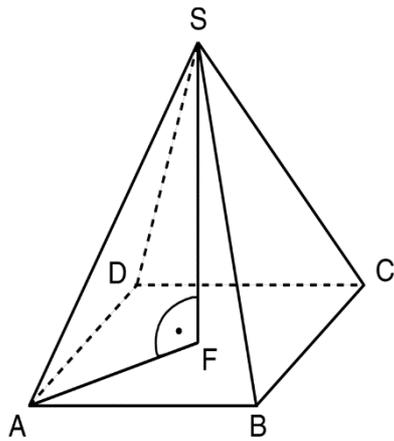


Die Pyramide

Bezeichnungen an der Pyramide:



\overline{FS} ist die Höhe der Pyramide.

$\overline{SA}, \overline{SB}, \overline{SC}, \overline{SD}$ sind die
Seitenkanten der Pyramide.

$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ sind die
Grundkanten der Pyramide.

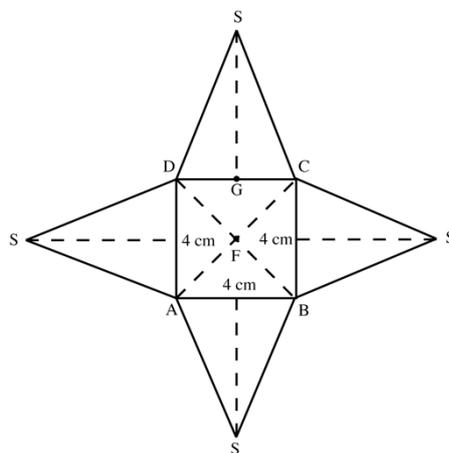
$\sphericalangle FAS$ ist der Neigungswinkel der
Seitenkante \overline{AS} gegen die Grundfläche.

Für Pyramiden gilt:

1. Sie werden von einem n-Eck als Grundfläche und n Dreiecken als Seitenflächen begrenzt.
2. Die Länge der Lotstrecke von der Spitze auf die Grundfläche heißt Höhe der Pyramide.
3. Die Mantelfläche ist die Vereinigungsmenge der Seitenflächen.
Die Oberfläche ergibt sich aus der Summe der Mantelfläche und der Grundfläche.

Beispiel:

Die Grundfläche der Pyramide ist ein Quadrat mit Seitenlänge 4 cm und die Höhe der Pyramide beträgt 5 cm.



Netz der Pyramide

Berechnung der Oberfläche der Pyramide:

$$\text{Oberfläche} = \text{Grundfläche} + \text{Mantelfläche} = A_{\text{Quadrat}} + 4 \cdot A_{\text{Dreieck}}$$

Flächeninhalt eines Dreiecks:

$$\text{Betrachte } \triangle DCS: A = \frac{1}{2} \cdot |\overline{DC}| \cdot h_{DC}$$

Berechnung von h_{DC} :

$$|\overline{SG}|^2 = |\overline{FG}|^2 + |\overline{FS}|^2 \quad (\text{Satz des Pythagoras})$$

$$|\overline{SG}|^2 = (2\text{cm})^2 + (5\text{cm})^2 = 29\text{cm}^2 \Rightarrow |\overline{SG}| = \sqrt{29}\text{cm} \quad (\approx 5,39\text{cm})$$

$$\Rightarrow A_{\triangle DCS} \approx \frac{1}{2} \cdot 4\text{cm} \cdot 5,39\text{cm} \approx 10,78\text{cm}^2$$

$$\Rightarrow O \approx 4\text{cm} \cdot 4\text{cm} + 4 \cdot 10,78\text{cm}^2 \approx 16\text{cm}^2 + 43,12\text{cm}^2 \approx 59,12\text{cm}^2$$

Berechnung des Neigungswinkels φ der Seitenkante AS gegen die Grundfläche:

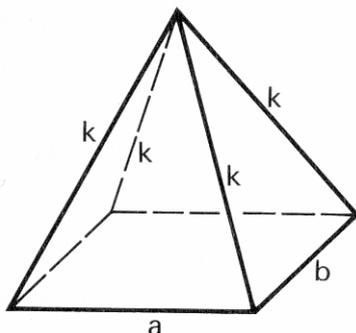
$$\text{Betrachte } \triangle AFS: \sin\varphi = \frac{|\overline{FS}|}{|\overline{AS}|}$$

Berechnung von $|\overline{AS}|$:

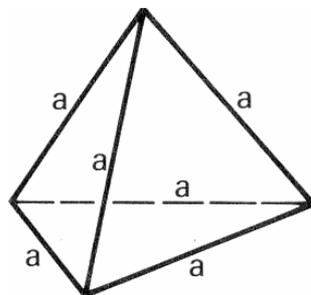
$$|\overline{AS}|^2 \approx (2\text{cm})^2 + (5,39\text{cm})^2 = 4\text{cm}^2 + 29\text{cm}^2 = 33\text{cm}^2 \Rightarrow |\overline{AS}| = \sqrt{33}\text{cm} \quad (\approx 5,74\text{cm})$$

$$\Rightarrow \sin\varphi = \frac{5\text{cm}}{\sqrt{33}\text{cm}} \approx 0,87 \Rightarrow \varphi \approx 60,58^\circ$$

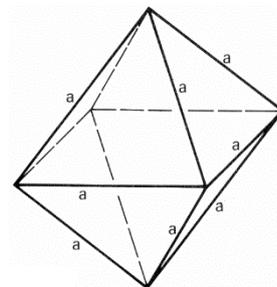
Besondere Pyramiden



Gerade Pyramide:
Pyramide mit lauter gleich
langen Seitenkanten

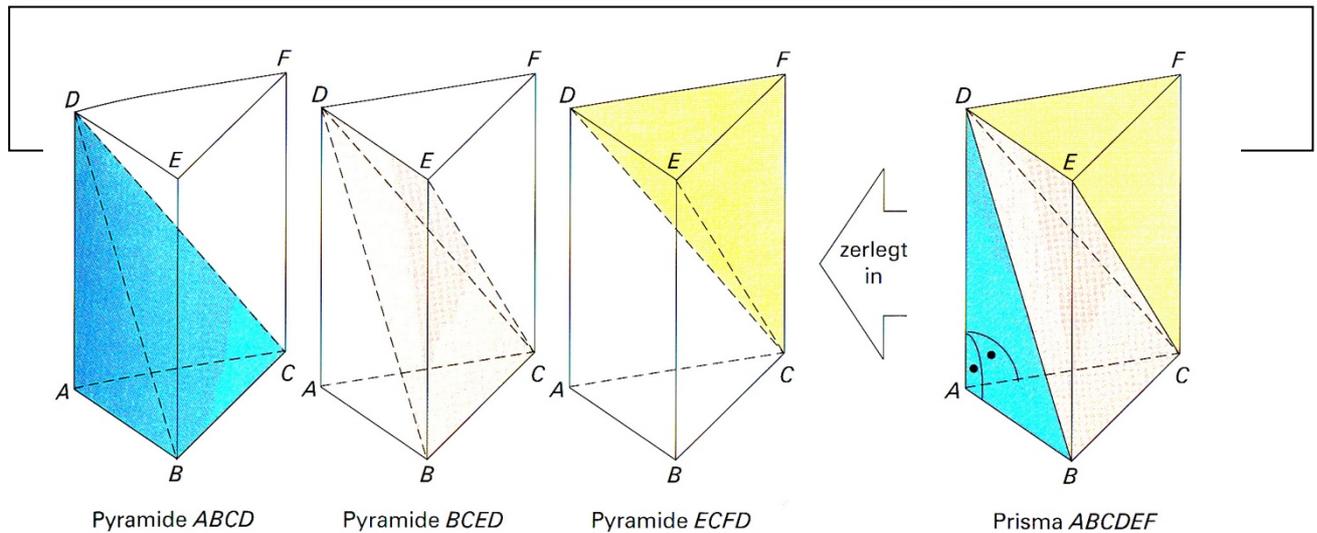


Reguläres Tetraeder:
Dreiseitige Pyramide mit
lauer gleich langen Kanten



Reguläres Oktaeder:
Vierseitige Doppelpyramide
mit lauter gleich langen Kanten

Herleitung der Formel zur Bestimmung des Rauminhalts einer Pyramide



Für den Rauminhalt einer Pyramide gilt also: $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Aufgaben:

- Eine Pyramide $ABCD$ hat ein Quadrat mit 7,2 cm Seitenlänge als Grundfläche und eine Höhe von 9,3 cm.
 Berechnen Sie die Maßzahl für das Volumen der Pyramide.
- Bei einer Pyramide mit rechteckiger Grundfläche verhalten sich die Längen der Seiten wie 3:2.
 Bestimmen Sie, wie lang die Rechtecksseiten sind, wenn die Pyramide 7 cm hoch ist und ein Volumen von 224 cm^3 hat.

Lösungen:

1

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \quad G = 7,2 \cdot 7,2 = 51,84 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot 51,84 \cdot 9,3 = 160,70 \text{ cm}^3$$

2

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \Rightarrow G = \frac{3 \cdot V_{\text{Pyramide}}}{h} = \frac{3 \cdot 224}{7} = 96 \text{ cm}^2$$

Längen der Seiten der Grundfläche verhalten sich wie 3:2 $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2} \cdot b$

$$\Rightarrow G = \frac{3}{2} \cdot b \cdot b = 96 \Rightarrow b^2 = 64 \Rightarrow b_1 = 8 \text{ cm} \quad (b_2 = -8)$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12 \text{ cm}$$